

*I Giochi di Archimede -- Soluzioni biennio*

21 novembre 2007

## Griglia delle risposte corrette

| Problema | Risposta corretta |
|----------|-------------------|
| 1        | C                 |
| 2        | C                 |
| 3        | C                 |
| 4        | B                 |
| 5        | B                 |
| 6        | B                 |
| 7        | E                 |
| 8        | E                 |
| 9        | A                 |
| 10       | C                 |

| Problema | Risposta corretta |
|----------|-------------------|
| 11       | C                 |
| 12       | D                 |
| 13       | C                 |
| 14       | E                 |
| 15       | B                 |
| 16       | A                 |
| 17       | B                 |
| 18       | C                 |
| 19       | C                 |
| 20       | B                 |

## Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.

Calcoliamo quante migliaia di Euro guadagna il calciatore in un'ora:

$$\frac{6.000.000}{1000 \cdot 365 \cdot 24} = \frac{6.000}{365 \cdot 24} = \frac{600}{73 \cdot 12} = \frac{50}{73}.$$

Questo numero è strettamente maggiore di  $\frac{1}{2}$  e strettamente minore di 1. Quindi in un'ora il guadagno del calciatore è strettamente maggiore di 500 Euro e strettamente minore di 1000 Euro. Per guadagnare 1000 Euro occorre quindi un tempo compreso tra una e due ore.

2. La risposta è **(C)**.

Indichiamo con  $p$  il valore comune del perimetro. I lati  $l_3$  ed  $l_4$  del triangolo equilatero e del quadrato valgono rispettivamente  $p/3$  e  $p/4$ . Di conseguenza,  $\frac{l_4}{l_3} = \frac{p/4}{p/3} = \frac{3}{4}$ .

3. La risposta è **(C)**.

Sia  $x$  il numero dei supplementi venduti. L'incasso dovuto alla vendita dei supplementi è dato da  $1,50x$  Euro mentre quello dovuto alla vendita dei giornali è di  $333 \cdot 0,90$  Euro = 299,70 Euro. Di conseguenza,  $1,50x + 299,70 = 539,70$ , da cui  $x = 160$ . Il numero di supplementi venduti è compreso tra 133 e 199 copie.

4. La risposta è **(B)**.

Per prima cosa osserviamo che i 28 punti risultano tutti distinti, quindi anche tutti i segmenti

da tracciare saranno distinti. Fissato un punto sulla prima fila, da questo partirà un segmento per ciascuno dei punti della seconda fila, ovvero 14 segmenti. Ripetendo questo ragionamento per ciascuno dei 14 punti della prima fila, il numero totale dei segmenti tracciati risulta essere  $14 \cdot 14 = 196$ .

5. La risposta è **(B)**.

Il prodotto di  $a$  e  $b$  è positivo, di conseguenza  $a$  e  $b$  hanno lo stesso segno. La somma di due numeri di segno concorde ha ancora lo stesso segno degli addendi; poiché  $a + b < 0$ , sia  $a$  che  $b$  devono essere entrambi negativi.

6. La risposta è **(B)**.

$$10^{100} + 100^{10} = 10^{100} + (10^2)^{10} = 10^{100} + 10^{20} = 10^{20}(1 + 10^{80}).$$

7. La risposta è **(E)**.

Indichiamo con  $b$ ,  $h$  ed  $A$  rispettivamente le lunghezze della base, dell'altezza e l'area del rettangolo originario. Base e altezza del rettangolo "ingrandito" hanno rispettivamente lunghezza  $B = b(1+0,2)$  e  $H = h(1+0,5)$ . L'area del nuovo rettangolo è quindi  $B \cdot H = (b \cdot 1,2)(h \cdot 1,5) = 1,2 \cdot 1,5 \cdot A = 1,8 \cdot A$ . L'area risulta quindi aumentata dell'80%.

8. La risposta è **(E)**.

La sequenza secondo cui le persone entrano dai cancelli si ripete esattamente ogni  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$  persone. Di conseguenza la 2007-esima persona entrerà dallo stesso cancello da cui entra la  $n$ -esima persona, dove  $n$  è il resto della divisione di 2007 per 15, cioè  $n = 12$ . Poiché gli spettatori dall'11-esimo al 15-esimo entrano dal quinto cancello, Francesco entra dal quinto cancello.

9. La risposta è **(A)**.

Sappiamo che  $a = b/2$ ,  $c = 3b$ . Sostituendo si ha:

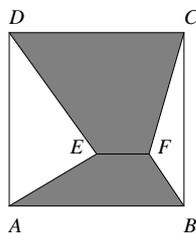
$$\frac{a+b}{b+c} = \frac{\frac{b}{2} + b}{b + 3b} = \frac{b \cdot \frac{3}{2}}{b \cdot \frac{4}{1}} = \frac{3}{8}.$$

10. La risposta è **(C)**.

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15} + \sqrt{54} = \sqrt{150} + \sqrt{54} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 3^3} = \sqrt{2 \cdot 3}(\sqrt{5^2} + \sqrt{3^2}) = 8\sqrt{6}.$$

11. La risposta è **(C)**.

L'area dell'esagono in questione si può ottenere per differenza tra l'area del quadrato  $ABCD$  e quella dei triangoli  $AED$  e  $BCF$ .



Siano  $EH$  e  $FK$  le altezze dei triangoli  $AED$  e  $BCF$  uscenti dai vertici  $E$  ed  $F$ . Si ha:

$$\begin{aligned} A_{ABFCDE} &= A_{ABCD} - A_{AED} - A_{BCF} = A_{ABCD} - \frac{1}{2} \overline{AB} (\overline{EH} + \overline{FK}) = \\ &= A_{ABCD} - \frac{1}{2} \overline{AB} (\overline{AB} - \overline{EF}) = 9 \text{ m}^2 - 3 \text{ m}^2 = 6 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Si osservi inoltre che il valore dell'area dell'esagono non cambia traslando orizzontalmente la posizione del segmento  $EF$ . Traslando in modo che il punto  $F$  si trovi sul lato  $CD$  i calcoli risultano semplificati.

12. La risposta è **(D)**.

I percorsi consentiti sono tali da collegare ogni vertice del quadrato con ciascuno degli altri, quindi i percorsi possibili sono tanti quanti sono gli ordinamenti possibili dei vertici del quadrato. Il vertice di partenza è fissato, il secondo vertice può essere scelto in 3 modi distinti, il terzo in 2 modi mentre il quarto è obbligato. In totale si contano dunque 6 percorsi distinti.

13. La risposta è **(C)**.

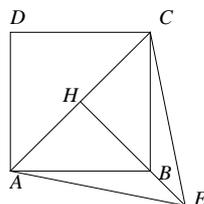
Sul pianeta Uru un anno è composto da  $34 \cdot 14 = 476$  giorni. La prossima Festa del Pianeta cadrà quando saranno trascorse un numero intero di settimane da oggi e sarà ancora il primo giorno dell'anno. Ovvero quando sarà trascorso un numero di giorni multiplo sia di 476 (durata di un anno) che di 8 (durata di una settimana). Il più piccolo numero di giorni per cui questo è vero è il minimo comune multiplo tra 476 e 8, cioè 952.

14. La risposta è **(E)**.

Il triangolo  $AED$  è simile al triangolo  $ABC$ . Il rapporto tra le lunghezze dei lati di  $AED$  e dei lati corrispondenti di  $ABC$  è  $1/3$  quindi  $A_{ABC} = 9 A_{AED}$ . Segue  $A_{BCED} = A_{ABC} - A_{AED} = 8 A_{AED} = 40 \text{ m}^2$

15. La risposta è **(B)**.

Sia  $H$  il punto medio di  $AC$ . Allora  $A_{ABCE} = A_{ACE} - A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AC} (\overline{EH} - \overline{BH})$ . D'altra parte  $\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ ,  $\overline{EH} = \sqrt{3} \overline{AH}$  e quindi  $A_{ABCE} = \frac{1}{2} 2 (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}^2 = (\sqrt{3} - 1) \text{ cm}^2$ .



16. La risposta è **(A)**.

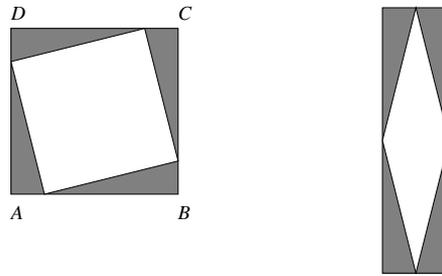
Siano  $x$  il peso in grammi di un tubetto di dentifricio e  $p$  il prezzo del dentifricio al grammo prima della riduzione. Il prezzo di un tubetto prima della riduzione è dato da  $xp$  e dopo la riduzione è dato da  $(x - 20)(1 + 0,25)p$ . Si ha quindi:  $xp = (x - 20)(1 + 0,25)p$ , da cui  $x = 100$  grammi.

17. La risposta è **(B)**.

Il numero  $10(2007)^4 - 8(2007)^3 + 12(2007)^2 + 721$  è positivo, infatti  $10(2007)^4$  è certamente maggiore di  $8(2007)^3$ . Inoltre  $2007 = 3 \cdot 669$  e quindi ciascuno dei primi tre addendi è un multiplo di 669. Il resto della divisione è dunque uguale al resto della divisione di 721 per 669, ovvero vale 52.

18. La risposta è **(C)**.

L'area del rombo bianco è quattro volte l'area del triangolo rettangolo.

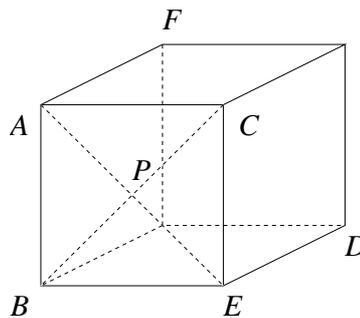


L'area del quadrato  $ABCD$  è uguale all'area del quadrato bianco più quattro volte l'area del triangolo rettangolo, cioè è uguale alla somma dell'area del quadrato bianco e del rombo bianco e quindi vale  $(17 + 8)\text{m}^2 = 25\text{m}^2$ .

19. La risposta è **(C)**.

Se Dario fosse un cavaliere per quanto egli afferma anche Bernardo sarebbe un cavaliere, ma l'affermazione di Bernardo non è compatibile con quella di Dario. Dunque Dario è un brigante. L'affermazione di Carlo allora è vera, quindi Carlo è un cavaliere. L'affermazione di Bernardo non è compatibile con quella di Carlo quindi Bernardo è un brigante. Infine Arturo afferma il vero e quindi è un cavaliere. Tra i quattro ci sono esattamente due cavalieri.

20. La risposta è **(B)**.



Il piano in questione contiene il segmento  $AP$ , di conseguenza contiene anche il suo prolungamento  $AE$ , ovvero coincide con il piano che contiene il triangolo  $ADE$ , ovvero contiene il quadrilatero  $AEDF$  e quindi divide il cubo in due parti uguali.